Unidad IV: Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

4.1 Teoría preliminar

4.1.1 Sistemas de EDL

Los problemas de la vida real pueden representarse de mejor manera con la ayuda de múltiples variables. Por ejemplo, piensaen el conteo de la población representado con la ayuda de una sola variable. Pero, esta depende del conteo de la población de depredadores así como también de las condiciones climáticas y la disponibilidad de alimentos. Todas estas condiciones en sí mismas forman una ecuación diferente definida en una variable separada.

Por lo tanto, para estudiar las relaciones complejas, requerimos de varias ecuaciones diferentes para definir diferentes variables. Tal sistema es el sistema de ecuaciones diferenciales. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se puede denotar como,

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n$$

Aquí xi (t) es una variable en términos de tiempo y el valor de i = 1, 2, 3, …, n. También A es una matriz que contiene todos los términos constantes, como [ai,j].

Dado que los coeficientes de la matriz constante A no están definidos explícitamente en términos de tiempo, por lo tanto, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es llamadoa veces autónomo. La notación convencional general para el sistema de ecuaciones diferenciales lineales es,

$dx/\ dt = f(t, x, y)$

$dy/\ dt = g(t, x, y)$

El sistema anterior de ecuaciones diferenciales tendrá numerosas funciones para satisfacerla. Mediante la modificación de la variable tiempo obtendremos un conjunto de puntos que se encuentran en el plano de dos dimensiones x-y, los cuales se denominan trayectoria. La velocidad con respecto a esta trayectoria, en algún tiempo t es,

$= (dx/\ dt, dy/\ dt)$

Un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es el siguiente,

$dx1/\ dt = -4\times 1 + 2\times 2$

$dx2/\ dt = 0\times 1 + -2\times 2$

Con el fin de determinar el conjunto completo de fórmulas para la variable dependiente de tiempo xi(t) para todos los valores de i, es necesario obtener primero los vectores propios y valores propios de la matriz constante A. En el caso que la matriz constante A posea un conjunto de valores propios repetidos para sus componentes, sería necesarioun vector propio generalizado.

Este es t, toma en cuenta que los vectores propios y valores propios de la matriz constante puede ser un subconjunto de los números reales o también un subconjunto de los números complejos.

La representación de la matriz del problema anterior es la siguiente, dx/ dt = A * x

En este caso, A es la matriz constante que puedeserrepresentada como,

$$A = \begin{matrix} -2 & 4 \\ 0 & -4 \end{matrix}$$

Y x(t)T es un vector de variables definidas en términos de tiempo, el cual es representado como,

$$x(t)T = \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix}$$

$$dx/\,dt = \begin{matrix} dx_1(t)/dt \\ dx_2(t)/dt \end{matrix}$$

En caso de que el vector propio de la matriz constante A sea un subconjunto de los números reales para este ejemplo, podemos escribir,

A = S * D * S-1

Aquí D es la matriz diagonal de la matriz de vectores propios de la matriz constante A y S es la matriz que contiene los vectores propios en forma de columnas, en el mismo orden como los valores propios se escriben en la matriz diagonal D.

En consecuencia, la forma de la matriz del ejemplo anterior se puede escribir como,

dx/ dt = A * x

dx1/ dt

dx2/ dt = −4 2

0 −4 * x1

x2

4.1.2 Sistemas de EDL homogéneos

Sabemos que una ecuación diferencial lineal es de la forma,

$$f_n(x)y^{(n)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=g(x)$$

Si esta misma ecuación se transforma en la forma,

$$f_n(x)y^{(n)}+\dots+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$$

Obtenemos una ecuación diferencial lineal homogénea. Esta se da cuando la función conocida no está presente en la ecuación diferencial lineal, entonces se le llama una ecuación diferencial homogénea. Y si tenemos una gran cantidad de tales ecuaciones juntas, de manera tal que dependen unas de las otras, y definen colectivamente un problema común, entonces se les llama un sistema de ecuaciones diferenciales lineal es homogéneo.

Tales sistemas pueden ser resueltos de manera eficiente con la ayuda de las matrices, las cuales son denominadas matriz fundamental. Sean X1, X2 … X3 las soluciones de la matriz fundamental del sistema de entrada de ecuaciones diferenciales homogéneas, entonces puede representarse de manera condensada como,

$$X' = AX$$

En la ecuación anterior, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales están definidas en algún intervalo, digamos I y la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es este

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_n X_n$$
$$= c_1 [xi1j] + c_1 [xi2j] + \cdots + c_1 [xinj]$$

En la ecuación anterior, los términos que se mantienen dentro de los corchetes son los vectores fila, donde X1 = [xi1j], X2 = [xi2j] …Xn = [xinj]. Estas son las soluciones n fundamentales del sistema de entrada de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas para el intervalo dado I. Entonces tenemos que la matriz fundamental para el sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales para el intervalo dado como I es,

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_{11} x_{12} \cdots x_{1n} \\ x_{21} x_{22} \cdots x_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n1} x_{n2} \cdots x_{nn} \end{pmatrix}$$

Los pasos para resolver un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales son los siguientes:

1.Construye la matriz de coeficientes para las ecuaciones del sistema dado.

2.Determina los valores propios de esta matriz de coeficientes del sistema dado de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

3.Ahora, busca el vector propio inicial de este conjunto de valores propios y nómbralo como EV1.

4.Determina la primera ecuación de este vector en términos de constantes k1, k2.

5.Después de esto, determina el siguiente conjunto de valores propios, sus vectores propios correspondientes y su ecuación.

6.Anota la solución general para las ecuaciones en términos de constantes k1, k2.

7.Por último, deriva la solución general para el sistema de ecuaciones.

Aunque el procedimiento para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo es bastante fácil, se da un ejemplo ilustrativo que te ayudará a hacer los conceptos más claros.

dx/ dt = 2x + 3y

dy/ dt = 2x + y

Primero, escribamos la matriz constante para el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneas dado. Esto es,

$$M(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz columna de los valores propios construida a partir de esta matriz de coeficientes es la siguiente,

$$eigenvals(M(x)) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto nos da 1 = −1 y 2 = 4. A partir de estos valores propios el vector propio asociado se construye como,

$$EV1 = \begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 3 \\ 2 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Colocando el valor de 1 = −1 en lugar, el valor exacto deEV1se obtiene como,

$$EV1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de este se obtiene como,

| EV1 | = 0.

La ecuación asociada de este vector propio es,

3k1 + 3k2 = 0

2k1 + 2k2 = 0

De manera similar, la otra ecuación para el segundo vector propio es,

-2k1 + 3k2 = 0

2k1 - 3k2 = 0

Cuando t = 0, c1 = 1 y c2 = 1.

X1 = e-t K1

$$X1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . e^{-t}$$

Del mismo modo,

$$X2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} . e^{4t}$$

Esto nos da la solución general,

$$X = c1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} . e^{-t} + c2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} . e^{4t}$$

4.1.3 Solución general y solución particular de sistemas de EDL

Solución general de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y solución particular de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, es absolutamente esencial conocer los conceptos de valor propio y vector propio. Para una matriz M dada, es llamadolos valores propios, si la condición es verdadera,

$$Mx = \lambda x$$

Aquí x se llama vector propio de la matriz M.

Es decir, los vectores propios son aquellos vectores que luego de ser multiplicados por la matriz de entrada permanecen proporcionales a la matriz de entrada o resultan cero.

Sea A la matriz que contiene los valores propios, como [1, 2, 3 … n]. A continuación se indican los pasos para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales.

1. Calcula las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales y construye la matriz que contiene los coeficientes de todas las ecuaciones en el orden en que aparecen en el sistema de entrada de la ecuación.

2. Los valores propios se obtienen de esta matriz que contiene los términos de los coeficientes.

3. Calcula todos los vectores propios de valores propios como los obtenidos en el paso anterior. Nómbralos en la secuencia a medida que son determinados como EV1, EV2, EV3 …EVn.

4. Calcula las ecuaciones correspondientes para cada uno de los conjuntos de valores propios y los vectores propios asociados. Repite este paso para cada par de valores y vectores propios.

5. Obtén la solución particular para un sistema de ecuaciones no homogéneo como,

$$x^*(t) = X(t)\int X^{-1}(t)\,p(t)\,dt$$

Aquí X(t) se define como,X(t) = [x1 x2 x3 … xn]

Y en caso de que el sistema de entrada sea una ecuación diferencial homogénea, entonces la solución particular del sistema será dada de la forma,

$$x = \zeta e^{\lambda t}$$

La ecuación anterior nos da la relación,

$$(A - \lambda I)\zeta = 0$$

En la relación anterior, y son valores propios y vectores propios, respectivamente.

6. Y la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales lineales es dada de la forma,

$$x(t) = x^*(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

En general podemos decir que la solución de un sistema de ecuación diferencial es llamada solución general si los valores de las constantes no se obtienen en la solución final. La misma solución puede convertirse en una solución particular cuando tenemos el valor de las constantes determinadas. Esto se hace en el caso que el sistema de entrada de la ecuación diferencial sea un problema de valor inicial con las condiciones iniciales establecidas para la determinación de los términos constantes.

El ejemplo siguiente aclarará el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Determina el conjunto de ecuaciones como xT(t) = [(x1(t), x2(t)] para el sistema de ecuaciones dx/ dt = A * x con las condiciones iniciales establecidas como x(0) = x0 = (x01, x02). El valor de la matriz A estádada como,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes arriba es,

f( ) = 2 –trace(A) * + det(A) = 2 + 4 + 4

Y las raíces de esta ecuación nos dan repetidos valores propios de la matriz como, 1 = 2 = −2.

Entonces, el vector propio de la matriz es dado de la forma,

$$(A_\mu * I) * v = (A - (-2) * I) * v = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \Bigg($$

La matriz tiene un solo vector propio ya que ambos valores propios son los mismos. Por lo tanto, la solución general del problema se da como,

$$(A - 2) * I - A) * v = v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1v_1 + 1 \\ -1v_1 + 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, un vector propio generalizado puede ser calculado como, v = vp +s1* vh1 v1 v2 −1 0 +s1* 1 1

La solución particular de este problema sería vT(p) = (−1, 0) = v2, el cual es el valor propio generalizado de esta matriz, junto con los valores propios repetidos y vh es la solución homogénea dando el vector propiov1.

$$s = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Y la solución general del problema es,

$$\underline{x}(t) = S * e^{Jt} * \underline{c}$$

Estonos da,

x1(0) = c1 e0 + c2 (0 – e0) = c1 – c2 = x01

x1(0) = c1 e0 + c2 (0) = c1 = x02

4.2 Métodos de solución para sistemas de EDL

Un sistema de diferenciales lineales puede resolver las ecuaciones. Al igual que existen varias técnicas para resolver una ecuación diferencial lineal, también las hay para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Como el método de eliminación de Gauss, método separable y reducible etc. Sea un sistema de ecuaciones diferenciales lineales representado como,

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\cdots+a_{1n}(t)x_n(t)\\
x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t)+a_{22}(t)x_2(t)+\cdots+a_{2n}(t)x_n(t)\\
x_3'(t) &= a_{31}(t)x_1(t)+a_{32}(t)x_2(t)+\cdots+a_{3n}(t)x_n(t)\\
&\cdots\cdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t)+a_{n2}(t)x_2(t)+\cdots+a_{nn}(t)x_n(t)
\end{aligned}
$$

Entonces, la representación de la matriz equivalente de este sistema de ecuaciones diferenciales lineales será,

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
C=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}
$$

$$
X=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}
$$

Ahora, la técnica más conveniente para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales lineales es recurrir al método de multiplicación de matrices. La fórmula para resolverlo está dada de la forma,

$$
A.X=C
$$

Aquí A es la matriz que contiene los términos coeficientes de toda la ecuación del sistema, C, que es una matriz columna compuesta de elementos no homogéneos y, finalmente, la matriz X es la que contiene los elementos desconocidos. Cuando la matriz C es igual a cero, entonces el sistema dado es un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales.

Todo el mundo está familiarizado con el hecho de que multiplicar unas cuantas matrices es mucho mejor que solucionar las ecuaciones algebraicas crípticas para cuatro variables desconocidas. Sin embargo, la técnica anterior nos da la solución en todo momento. Por lo tanto, tenemos que adoptar algunas otras técnicas para resolver las ecuaciones.

Dos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se llaman equivalentes en la situación de que ambos produzcan las mismas soluciones para variables desconocidas. Sin embargo, esto puede lograrse mediante aplicar algunas operaciones elementales como la multiplicación con una constante,la reordenación de las ecuaciones, etc.Sea un sistema de ecuaciones diferenciales lineales dado como,

- $x + y + z = 0$
- $x - 2y + 2z = 4$
- $x + 2y - z = 2$

4.2.1 Método de los operadores

Un operador es un objeto matemático que convierte una función en otra, por ejemplo, el operador derivada convierte una función en una función diferente llamada la función derivada. Podemos de nir el operador derivada

D que al actuar sobre una función diferenciable produce la derivada:

0f(x) = f(x) ; D1f(x) = f0(x) ; D2f(x) = f00(x) ; : : : ;Dnf(x) = f(n)(x) :

Es posible construir la siguiente combinaci on lineal con los operadores diferenciales:

P

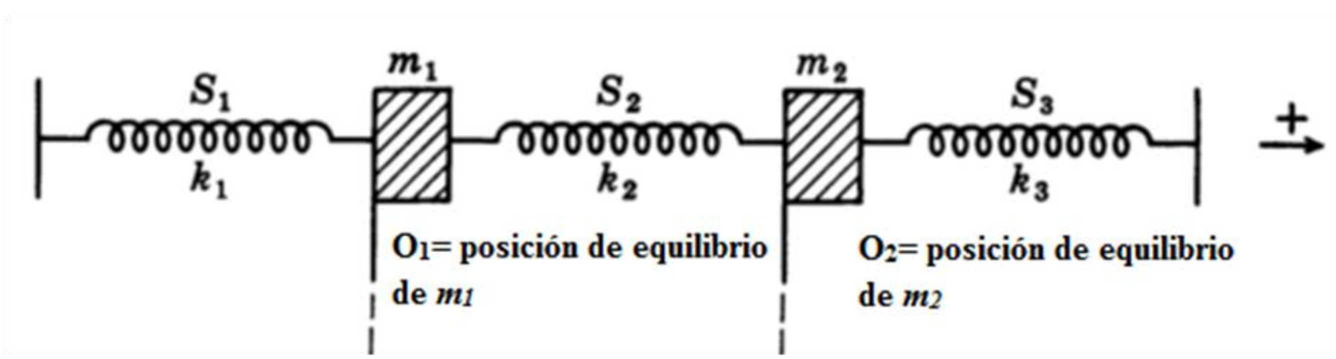
(D) = a0 + a1D + a2D2 + + anDn ; an 6= 0 : (1)

4.2.2 Utilizando transformada de Laplace.

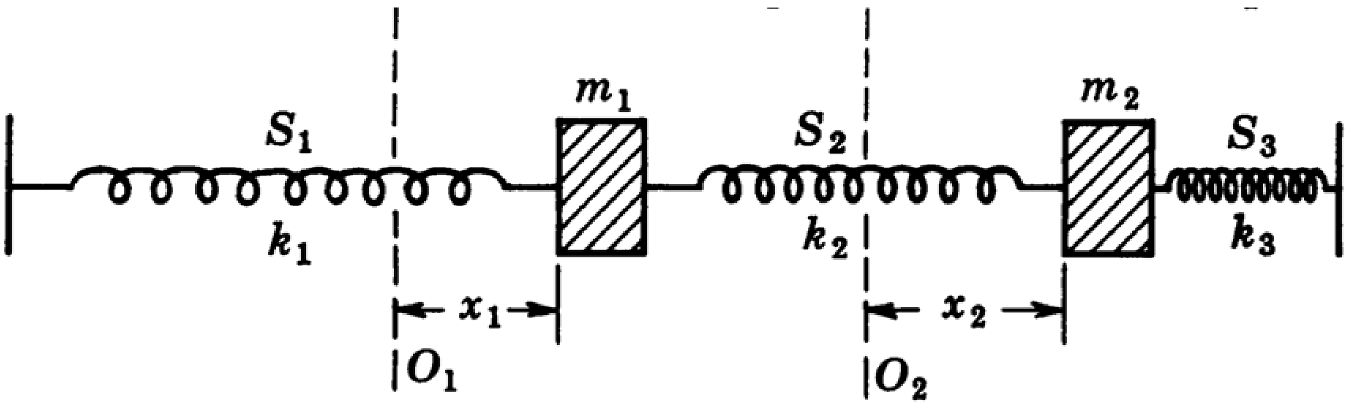
4.3 Aplicaciones

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales encuentran sus aplicaciones en varios problemas que surgen en el sistema del mundo real. Algunos de estos problemas se discuten a continuación.

1. Problema mecánico del acoplamiento de los resortes: Dos cuerpos con masa m1, m2, respectivamente, yacen sobre una mesa. La mesa está libre de fricción. Los dos cuerpos están conectados entre sí con la ayuda de un resorte. Esteresorte está en una posición no estirada. También cada uno de estos cuerpos está conectado a una superficie estática con la ayuda de los resortes. Una vez más, estos resortes no están estirados. La constante elástica de cada uno de los resortes es k1, k2, k3, respectivamente. La situación anterior puede ilustrarse como,



Aquí O1 es la posición inicial del primer cuerpo y O2 es la posición inicial del segundo cuerpo. Los cuerpos pueden ser cambiados de su posición de equilibrio mediante mover cualquiera delos cuerpos en cualquier dirección y luego soltarlos. Unejemplo de estoes,



En la figura anterior, x1 es la cantidad de distancia recorrida por el primer cuerpo cuando este se mueve desde la posición de equilibrio y x2 es la cantidad de distancia recorrida por el segundo cuerpo cuando este se mueve desde la posición de equilibrio. Esto implica que el primer resorte se alarga desde la posición estática por una distancia de x1 y el segundo resorte se alarga desde la posición estática por una distancia de x2 – x1.Esto implica que dos fuerzas restauradoras están actuando sobre el primer cuerpo, estas son:

- *La fuerza del primer resorte la cual actúa en dirección izquierda. Esta fuerza por la ley de Hookes igual ak1×1.*
- *La fuerza del segundo resorte que actúa en dirección derecha. Esta fuerza es igual a k2(x2 – x1).*